

Глава 1

Введение

Робот — универсальный автомат для осуществления механических действий, подобных тем, которые осуществляет человек, выполняющий физическую работу (Юревич). Альтернатива: автоматическая машина, заменяющая человека и чем-либо напоминающее его разумное поведение.

Робот — (чеш. *robota*, повседневный труд) машина с человекоподобным поведением, частично или полностью выполняющая функции человека по взаимодействию с окружающей средой.

Робототехника — создание и применение роботов и основанных на них технических систем и комплексов различного назначения. Робототехника возникла на основе кибернетики и механики для обеспечения возможности гибкой автоматизации, исключение человека из производственных операций.

Робототизированные и робототехнические системы в производстве. Промышленные роботы. Применение: промышленность, транспорт, с/х, медицина, сфера обслуживания, домашние роботы.

Особенности

- Информационное и физическое взаимодействие с окружающей средой. Среда в которой существуют роботы очень сложна.
- Универсальность и гибкость: выполнение различных операций, интеллектуальное поведение.
- Качественно новые средства автоматизации, новые технологии.
- Автономность.

1.1 История развития робототехники

В “Иллиаде” Гомера Гефест выковывает механических служанок. Во 2 веке до н.э. Китае разрабатываются сложнейшие автоматы, включая целые механические оркестры. 1 век до н. э. В книге "Пневматика" Герон Александрийский описывает несколько десятков автоматических механизмов.

1193 г. Альберто Великий, механическая кукла-андроид, умеющая открывать двери и звонить в звонок. Леонардо да Винчи (XV в.), Ганс Бульман (XVI в) в Нюрнберге — андроиды играющие на музыкальных инструментах, Джионелло Торичелли (XVI в.).

XVIII век. Часовые механизмы. Французский механик Жак де Вокансон (1738) создает андроида-флейтиста. Швейцарские часовщики Жан-Пьер Дро (1721-1790) и его сын Анри Дро (1752-1791). Ряд андроидов: писец, рисовальщик, музыкант. Сменный барабан с программой.

XIX век Автоматический ткацкий станок работающий по программе (Жозеф Мари Жаккард, 1801). Электричество, электротехника: реле, электродвигатели.

1900-1939 гг. Электронные лампы. Карел Чапек в пьесе “R.U.R.” (“Rossum’s Universal Robots”) вводит в обращение слово “робот”. Электрические человекоподобные машины (обычно в рекламных целях): Английский инженер Ричардсон — дистанционно управляемый электрический человек. Программируемый покрасочный механизм (1938). Westinghouse Electric Corp. представляет механического гуманоидного робота и робота-собаку.

1.1.1 Современная история

1940-1950 гг. США, копирующие манипуляторы для атомных исследований.

1960-1962 гг. США, первый манипулятор МН-1 (рука “Эрнста”) с адаптивным управлением (снабженный датчиками). В Университете Джона Хопкинса (Johns Hopkins University) создано "Животное Хопкинса" (Hopkins Beast). Первые промышленные манипуляторы: Первый робот "Versatran предназначенный для практического промышленного использования, разработан в компании AMF (American Machine and Foundry) Джонсоном (Harry Johnson) и Миленковичем (Veljko Milenkovic). Джо Энгельбергер (Joe Engelberger) внедряет первые разработанные Unimation промышленные роботы-манипуляторы на заводах General Motors в Нью Джерси. Программа на магнитном барабане. Грузоподъемность 40 кг.

В дальнейшем — рост парка промышленных роботов: 1975 — 8,5 тыс.,

1983 — 66 тыс., 1995 — 605 тыс., стабилизация в пределах 1 млн. в 2005 году. Страны-лидеры: Япония, США, Италия, Франция. Распределение по применению: обслуживание, сварка, значительно меньше — сборка, окраска, обработка. Прогресс прежде всего был направлен на совершенствование системы управления: программное, затем оживленные. **1980-1981 гг.** Роботы с СТЗ: “PUMA” (Программируемый Универсальный Манипулятор ПУМА), “Юнимейт”.

1969 г. Стэнфордский робот Шейки (Shakey) представлен как первый мобильный робот, управляемый искусственным интеллектом. Шейки обеспечивал выполнение задания, даже если оно было сформулировано в самом общем виде. Обход препятствий, ориентирование на местности, прокладка маршрута. Шейки использовал бортовую ЭВМ SDS-940, телекамеру, лазерный дальномер и датчики столкновения, стационарные ЭВМ PDP-10 и PDP-15 производства DEC. (в СССР в 1971 г. — “ТАИР“, “МАВР“).

1971 г. Япония. Отработка системы “глаз-рука” для сборки простых изделий по чертежу (“Хивил“).

СССР: первые успехи — 60-х гг., 72 г. — план по внедрению роботов, 75 г. — 30 промышленных моделей, 80-е гг. — парк на уровне США. Космические исследования: “Венера-1”, “Луна-9” (мягкая посадка), “Луноход”, манипуляторы, “Марс-3”, “Венера-9”. Экстремальная робототехника: пожаротушение, Чернобыльская АЭС.

96 г. Honda P-2, в дальнейшем к “Asimo”.

97 г. Первый чемпионат Robocup (колесные роботы разных категорий, андрониды).

98 г. “Больницы — это та самая окружающая среда, которая идеально подходит для использования роботов - сообщает Джозеф Энгельбергер, представляя робота-помощника HelpMate Trackless Robotic Courier. Перевоз грузов по больнице (без линии на полу), до 100 кг.

Sony Aibo, Sony SDR-3X 50 см., 50 кг, 24 степени свободы, 2 RISC процессора, ОС.

SlugBot — тележка с манипулятором, питающаяся слизнями.

“Кхерега”, LEGO роботы. Роботы-пылесосы: Trilobite представлен на рынок шведской компанией Electrolux, затем iRobot.

Военные применения: робот-санитар Bloodhound (2003), мобильные — Talon (вооруженный), PackBot (Разведка, позднее обнаружение снайперов), Dragon Runner,, БЛА.

Роботы автомобили: P.A.T.H. — движение в колонне; DARPA Grand Challenge: 2004, 2005, 2007.

da Vinci Surgical System (2006) — операции на бьющемся сердце.

Основные тенденции: зрение, тактильные сенсоры, построение модели среды, интерфейс человек-машина, групповое управление. **Дальнейшее развитие идет в основном за счет совершенствование системы управления**

1.2 Применение роботов

1. Промышленность.

(a) Машиностроение

- i. Основные операции: сварка*, сборка, резка, нанесение покрытий.
- ii. Вспомогательные операции*: механообработка, холодная штамповка, кузнечные, литье.

(b) Добывающая

(c) Легкая

2. Непромышленное применение

(a) С/х: доение*, автоматизация комбайнов, уборка, сбор, погрузка, сортировка.

(b) Медицина: хирургия, обслуживание, реабилитация, протезирование, инвалиды.

(c) Транспортные системы: перевозка грузов и людей.

(d) Домашние роботы: ведение хозяйства, развлечение.

3. Экстремальная робототехника.

(a) Космос

(b) Подводные

(c) Аварии, спасательные работы.

(d) Военные

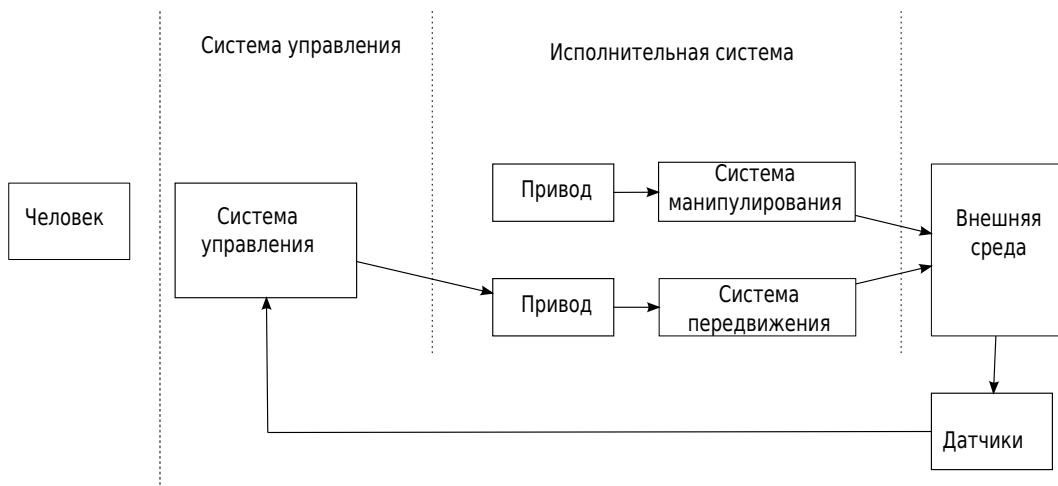


Рис. 1.1: Устройство робота

1.3 Устройство роботов, классификация, основные подсистемы

1.3.1 Манипуляторы

Манипулятор — пространственный механизм в виде кинематической цепи из звеньев, образующих пары с угловым или поступательным движением, и системы приводов. Манипулятор оканчивается рабочим органом.

Степени свободы: поступательные и ориентировочные. Обычно не менее $3+3$. Есть конструкции с большим числом звеньев. Обычно звенья считаются твердыми, однако возможны гибкие звенья.

По конструкции манипуляторы можно разделить на:

- Манипуляторы с прямоугольной системой координат (козловой кран).
- С цилиндрической системой координат.
- Со сферической системой координат (МП-9С).
- С уловой системой координат (Katana 5M, Puma).

Рабочий орган.

- **Захватное устройство (схват)**, аналог человеческой кисти, обычно не более 3-х пальцев. Возможны специальные конструкции (для захвата картона, листов металла, стекла).
- **Рабочий инструмент.**

1.3.2 Система передвижения

Осуществляет передвижение робота в пространстве. Сильно различается зависимости от назначения робота и среды, где он оперирует. Можно классифицировать по среде, где осуществляется перемещение: наземные, воздушные, водные, подводные, космические и т.п.

- Колесные системы передвижения. Просты, удобны в управлении, не самая лучшая проходимость, требуется отсутствие скольжения. Самые распространенные системы передвижения. Хороши для перемещения внутри зданий, по дорогам.
- Гусеничные. Аналог колесных с большей степенью проходимости.
- Шагающие. Наиболее перспективный тип. Теоретически обладает наибольшей проходимостью. Характеризуется сложной механической системой и системой управления (большое число приводов, необходимость формировать походку и держать равновесие). Многочисленные роботы-гуманоиды, BigDog (США).
- Воздушные. БЛА. Часто дистанционное управление.

1.3.3 Сенсорная система

Предназначена для получения информации о внешней среде, положении робота в ней, внутреннем состоянии робота. Представлена различными датчиками.

- Системы, дающие общую картину окружающей среды. Видеокамера (системы машинного зрения), пространственные сканеры (Подвижный лазерный дальномер, сканирующий некоторую область). Требуют сложной системы обработки данных, сокращающей объем информации. Типовая схема: изображение, сегментирование изображения, выделение объектов, построение модели окружающей среды).
- Системы определяющие отдельные физико-химические свойства внешней среды. Контактные датчики, инфракрасные датчики наличия препятствий (некоторые могут измерять расстояние) (фотодиод+светодиод=измерение отраженного свнта), сонары, дальномеры, термометры, химические анализаторы и т.п.

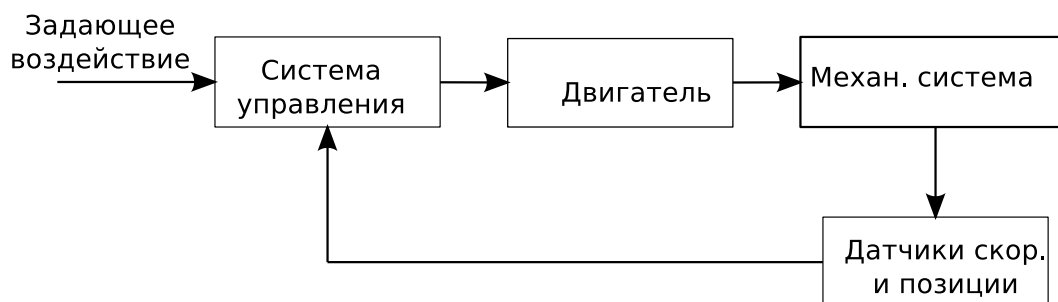


Рис. 1.2: Схема привода

- Системы определяющие положение робота в пространстве, его ориентацию, позу, параметры движения, усилия в исполнительной системе робота, силы взаимодействия со внешними объектами. Системы спутниковой навигации, инерциальные системы, гироскопы (ориентация, угловые скорости), акселерометры (ускорение), датчики усилия (как и в приводах, так и при взаимодействии с внешними объектами).

Информация поступающая с датчиков может быть неточна или зашумлена и поэтому часто нуждается в предварительной обработке. Чем больше датчиков и чем больше они выдают информации, тем полнее картина внешней среды, но тем сложнее ее обрабатывать и интегрировать в единую модель (например, возможны противоречия показаний различных датчиков и т.п.)

1.3.4 Приводы

Привод = двигатель + устройство управления двигателем + (возможно) преобразователи движения (редукторы и т.п.) Управление может осуществляться по позиции, скорости или моменту (усилию). Типовая система — управления ПИД-регулятор, возможны встроенные средства ограничения скорости, позиции, силы тока и т.п. Современные приводы обычно имеют цифровую систему управления. Широко используется широтно-импульсная модуляция.

Требования: малая масса, габариты и энергопотребление, СУ без колебательности. Момент, быстродействие и точность определяется из требований к системе.

Сервоприводы — двигатель + система управления, задающим воздействием является желаемая позиция привода.

Пневматические Просты, дешевы. Обычно цикловое управление. Проблемы с произвольным позиционированием — упругость воздуха. Грузоподъемность обычно до 10 кг.

Пневмоцилиндр (поступательное) и поворотный пневмоприводы.

Устройство: цилиндр с поршнем, распределительное устройство, регулятор скорости движения (дроссель), упоры ограничивающие движения с демпферами (гидравлические, пружинные), источник сжатого воздуха (0,3–0,6 МПа). Возможно несколько упоров.

Робот МП-9С.

Гидравлические Большая и средняя грузоподъемность (там у гидропривода наилучшее соотношение по мощность/стоимость). Возможна высокая точность позиционирования. Часто непрерывное управление. Большое усилие (давление до 20МПа). Необходимость в станции питания. Дорогие и сложные.

Устройство: сходно с пневматическими. Повышенные требования к герметичности. Необходима собственная система питания: компрессор, фильтры, расширит. бак, охлаждение.

Робот Coat-A-Matic (Retab).

Электрические Хорошая управляемость, удобство в эксплуатации, худшие массо-габаритные характеристики.

Различные типы: дв. постоянного тока (коллекторные, бесколлекторные), асинхронных двигателях (нерегулир. и регул. по частоте), шаговые, двигатель + регулируемая муфта, электромагниты.

Устройство: электродвигатель, часто тормоз, муфта от перегрузки, система управления (ШИМ).

Комбинированные Совместить достоинства различных видов приводов. Пневматические + гидравлические.

Рекуперация энергии в приводах Запасение механической или электрической энергии при торможении. Пружины в роботах с цикловым управлением. Уменьшение энергопотребления и увеличение грузоподъемности.

Искусственные мышцы По массо-габаритным характеристикам применю в тех. приводы уступают мышцам. Пневматические (замена гидроцилиндра эластичной трубкой или полостями). Пьезоэлектрические

микроприводы. Эффект памяти формы металла (никелид титана). Компания NanoMuscle: игрушка. Электроактивные полимеры (перераспределение зарядов в полимерах заставляют их изгибаться). Недостаток — ограниченное число циклов.

1.3.5 Организация и классификация систем управления

Осуществляет автоматическое управление исполнительной системой робота (возможно и еще каким-то подключенным оборудованием). Системы управления можно разделить на три группы (по Юревичу):

- Программные. Робот выполняет жестко запрограммированную последовательность действий.
- Адаптивные. Система управления получает информацию о внешней среде и может на ее основе изменять свое поведение.
- Интеллектуальные. Адаптивные системы, использующие методы искусственного интеллекта.

Граница между двумя полседними группами размыта. Робота умеющего брать произвольно лежащую на конвейере деталь следует относить ко второй группе, а систему доставки медикаментов по больнице, способную обходить непредвиденные препятствия, модифицировать маршрут, распознавать людей — к последней.

Аппаратная база систем управления непрерывно совершенствовалась. Первые системы управления часто были аналоговыми (программа могла храниться, например, как уровень сигнала на магнитной ленте). Сейчас СУ обычно основаны на компьютерах и микроконтроллерах (цифровые СУ). Дальнейшее развитие направлено на развитие ПО и специализированных языков программирования. Среды для программирования промышленных роботов в терминах последовательности технологических операций, специализированные проблемно-ориентированные языки, визуальные системы программирования.

Сложной системы управления обычно **иерархичны**. Что позволяет верхнему уровню управления не заботиться о задачах, решаемых на более низких уровнях. (Пример. Управление движением мобильного робота. Уровень прокладки маршрута, на более низком уровне решается задача движения по заданному маршруту, на самом низком уровне осуществляется управление приводами. Т.о., верхние уровни не заботятся о

конкретных параметрах привода, напряжении на его входе, высший уровень не решает проблемы совместного управления приводами, а только прокладывает траекторию и т.д.)

1.3.6 Человек в системе управления

1.3.7 Групповое управление

Групповое управление — совместное связанное управление несколькими объектами. Примеры: техническая линия, группа мобильных роботов.

Уровни:

- несколько приводов одного робота.
- несколько манипуляторов
- несколько роботов
- несколько роботов и др. оборудование

Общее решение задачи гр. управления: иерархическая централизованно-децентрализованная система. Основа — нижний уровень децентрализованного управления. Подбирается состав, специализация, распределение обязанностей, объем информационного обмена в соответствии с целями СУ. Разрабатываются верхние уровни иерархии управления, обработка отказов оборудования. Разработка непосредственных алгоритмов управления.

Пример: составление карты местности. Нижний уровень: несколько мобильных роботов-картографов. Использование априорной информации о местности для распределения заданий и перераспределение заданий в случае обнаружения непреодолимых препятствий; составление общей карты местности, реакции на пропажу/отказ роботов — верхний уровень. Составление карты данной области, выбор оптимального маршрута исследования (движение по периметру — поиск недоступных областей), выполнение движения по данному маршруту, передача данных на вышестоящий уровень — на уровне робота. Вариант с ограничением по возможности связи — при обнаружении недоступной области соседние роботы обмениваются картами и перераспределяют задачи.

Централизованное — наибольшие возможности для поиска оптимального решения, при большом числе роботов — сложно. Децентрализованное — обычно большое число роботов или ограниченные возможности связи.

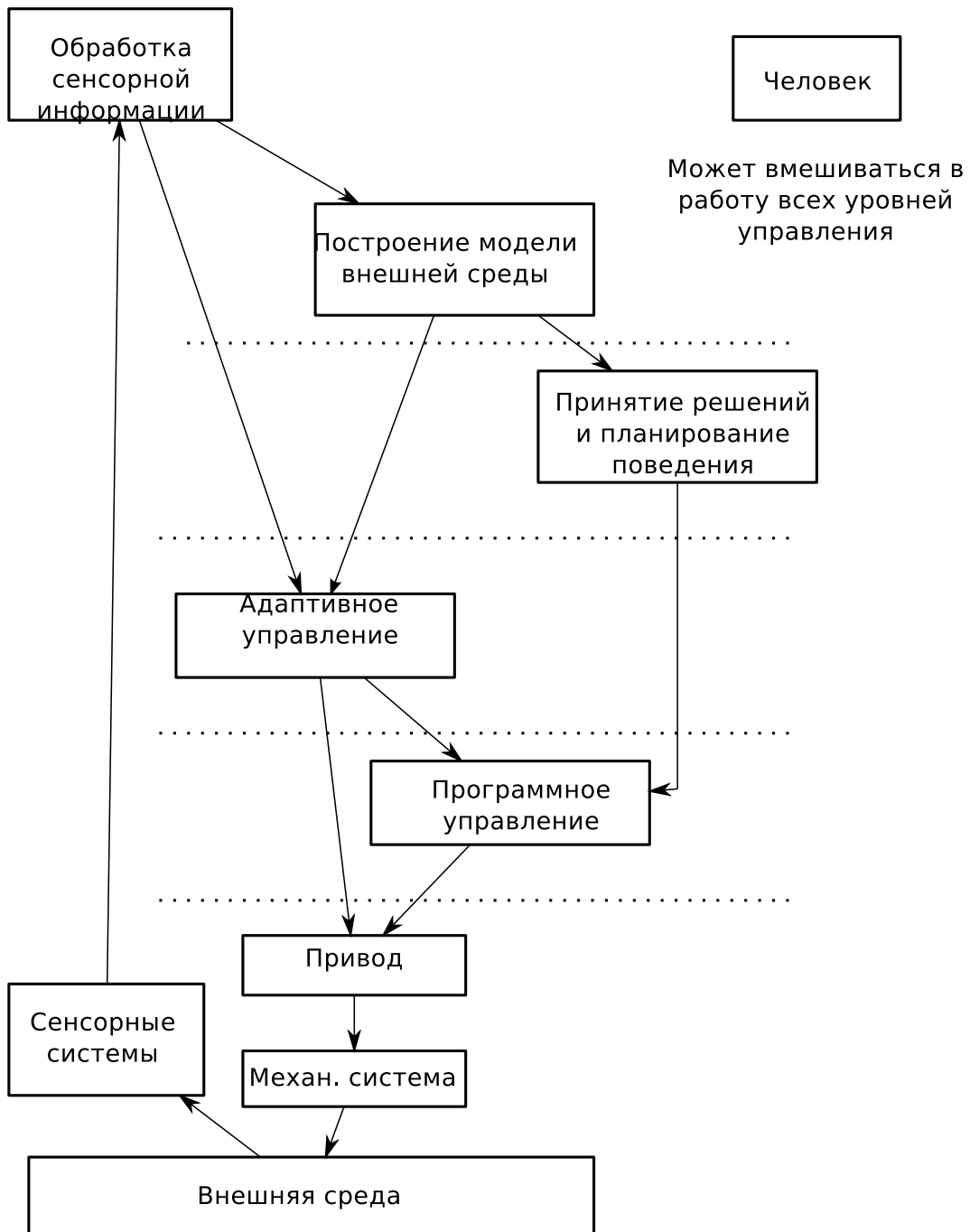


Рис. 1.3: Функциональная схема системы управления робота (Юревич)

В промышленности как правило есть возможность решать задачу группового управления заранее. Простейший пример — параллельное управление несколькими приводами.

Управление роботами в промышленности:

- согласование действий по времени
- согласование действий в пространстве
- согласование действий в пространстве и времени
- управление всем производственным объектом (ГАП)

Иерархическая структура: единица оборудования — технологическая ячейка — технологический участок — цех. В соответствии с планом производства — составляется план операций на каждом уровне.

Децентрализованная структура: функциональные модули (централизация, формирование заказов, контроль загрузки), технологические модули (выполнение одной технологической операции, запрос заказов), общая шина обмена информацией.

1.3.8 Гибкое автоматизированное производство

1.3.9 Современные тенденции в робототехнике

Глава 2

Необходимые сведения из теории автоматического управления

ТАУ изучает методы исследования и построения систем управления в технике. **Управление** — целенаправленное воздействие на какое-либо устройство, объект (**объект управления** (ОУ)). Целью управления обычно является некий заданный режим функционирования объекта. Управление генерируется **устройством управления** (УУ). Если в работе УУ участвует человек — автоматизированная система управления (АСУ), иначе — система автоматического управления (регулирования) САУ.

Объект управления:

$$y(t) = Au(t), \quad (2.1)$$

где $u(t)$ — входной сигнал, $y(t)$ — выходной, A — оператор ОУ.

Объект **статический**, если $y(t)$ зависит только от значений $u(t)$.

Объект **динамический**, если $y(t)$ зависит от значений u на $[t_0, t]$. Можно ввести понятие состояния объекта $x(t)$:

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \text{ — уравнение выхода,} \quad (2.2)$$

$$x(t) = f(x(t_0), u_{[t_0, t]}, t) \text{ — уравнение состояния.} \quad (2.3)$$

Объекты описываемые таким образом называются **динамическими системами** (ДС).

2.1 Принципы построения систем управления

Цель управления — получить на выходе системы желаемый сигнал y_r . $y_r(t)$ — задающее воздействие.

- Принцип программного управления. Обратив оператор системы можно получить желаемое управление. $u = A^{-1}y_r$. Не учитывает возмущения, неточности знания оператора A , обычно обратный оператор физически нереализуем.
- Принцип компенсации. Возмущения, действующие на систему, взаимное влияние различных подсистем, динамическое запаздывание можно скомпенсировать. Надо знать возмущение, чтобы его скомпенсировать.
- Принцип обратной связи или управления по ошибке. Вместо задачи нахождения управления $u(t)$ рассматриваем задачу построения оператора (динамической системы, регулятора) формирующего управление по ошибке регулирования $e = y - y_r$. Позволяет хорошо бороться с внешними возмущениями и неопределенности параметров системы. Фактически регулятор работает только, если ошибка ненулевая, что ведет к неточности отработки задающего воздействия (динамическое запаздывание).

<

2.2 Способы описания динамических систем

Обычно технические объекты описываются при помощи дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad (2.4)$$

$$y = h(x, t, u). \quad (2.5)$$

либо разностных уравнений того же вида.

Классификация ДС:

- линейные — нелинейные
- конечномерные (состояние — вектор в конечномерном ЛП) — бесконечномерные
- дискретные (присутствует квантование по времени или уровню сигнала) — непрерывные
- скалярные (SISO) — многосвязные (MIMO)
- стационарные (ДС инвариантна по отношению к сдвигу по времени) — нестационарные

Линейная конечномерная непрерывная стационарная система:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.6)$$

$$y = Cx, \quad (2.7)$$

где A , B и C — матрицы подходящих размеров.

Линеризация нелинейных систем у заданного режима функционирования.

Символьная запись оператора дифференцирования по времени: $p = \frac{d}{dt}$.

$$\dot{x} = f(x) + u \rightarrow px = f(x) + u$$

2.2.1 Способы описания непрерывных систем

Уравнение “вход-выход”

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 = b_mu^{(m)} + b_{n-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 \quad (2.8)$$

При переходе к символической записи:

$$y = \frac{b_mp^m + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0}u = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}u = W(p)u. \quad (2.9)$$

Передаточные функции Основаны на преобразовании Лапласа:

Оригинал — функция $x : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируема, $|x(t)| < Ce^{\gamma t}$.

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt. \quad (2.10)$$

Изображение — комплексная функция $X(s)$, определена при $\operatorname{Re} s > \gamma$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} X(s)e^{st}ds. \quad (2.11)$$

Свойства

1. Линейность.
2. $L\{x(t)\} = sX(t) - x(0)$.
3. $L\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \frac{X(s)}{s}$.
4. $L\{x(t - \tau)\} = e^{-\tau s}X(s)$.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению “вход-выход” (при нулевых начальных условиях) получаем:

$$Y(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}u = W(s)U(s). \quad (2.12)$$

Передаточная функция — отношение изображений выхода и входа ДС при нулевых начальных условиях.

Относительный порядок $r = n - m$, нули, полюса. Сокращение нулей и полюсов.

Весовая и переходная функции

Уравнение в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.13)$$

$$y = Cx, \quad (2.14)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, полностью характеризующий внутреннее состояние системы; $y \in \mathbb{R}^l$ — выход; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times m}$ — известные матрицы.

Наиболее полное описание, включает неуправляемые и ненаблюдаемые части системы. От уравнения “вход-выход” легко перейти к уравнению в пространстве состояний. Можно явно выписать передаточную функцию:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (2.15)$$

2.3 Управляемость и наблюдаемость

2.3.1 Управляемость

Определение 1. Система называется **вполне управляемой по состоянию**, если для любых двух состояний x_0 и x_1 и отрезка времени $T = [t_0, t_1]$ существует управление $u(t)$ переводящее ее из состояния x_0 в x_1 .

Для линейных стационарных систем: $t_0 = 0$, вместо x_0 или x_1 — ноль.

Матрица управляемости

$$K_{A,b} = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

Теорема 1. Критерий управляемости ЛСКНДС (2.6) вполне управляема тогда и только тогда, когда $\text{rank } K_{A,b} = n$.

$\text{Im}K_{A,b}$ — подпространство управляемости. Декомпозиция (Калмана) системы на управляемую и наблюдаемую часть:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u), \quad (2.16)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) \quad (2.17)$$

Управляемая скалярная система приводится к каноническому виду управляемости. Алгоритм: решаем относительно h уравнение $h^T K_{A,b} = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$, искомое преобразование $z = [h^T \ h^T A \ \dots \ h^T A^{n-1}]$.

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (2.18)$$

Назначение спектра обратной связью по состоянию $u = Kz$.

2.3.2 Наблюдаемость

Определение 2. Система называется **вполне наблюдаемой по состоянию**, если по выходу и входу системы на отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ можно восстановить состояние системы в момент времени t_1 .

Матрица наблюдаемости, критерий наблюдаемости.

Двойственность управляемости

$$\dot{x} = -Ax + c^T y, u = b^T x \quad (2.19)$$

Полноразмерный наблюдатель (динамическая система восстанавливающая неизвестный фазовый вектор по известному выходу и входу):

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + L(y - C\tilde{x}). \quad (2.20)$$

2.4 Качество систем управления

Сравнение систем управления. Точность, устойчивость, быстродействие надежность, стоимость, оптимальность и др. Обычно используются несколько показателей.

2.4.1 Показатели качества переходного режима

Временные показатели По переходной характеристике — реакции системы на ступеньку.

1. время регулирования t_p ,
2. перерегулирование (запас устойчивости, обычно до 30%) $\sigma = \frac{y_m - y_y}{y_y} \cdot 100\%$,
3. колебательность.

Корневые показатели По спектру.

1. степень устойчивости $h = \min_i \operatorname{Re} \lambda_i \quad t_p = \frac{3}{h}$,
2. степень колебательности $h = \max_i \frac{|\operatorname{Im} \lambda_i|}{|\operatorname{Re} \lambda_i|}$.

Частотные показатели По амплитудно-частотной характеристике $W(j\omega)$.

1. показатель колебательности (максимум АЧХ) A_m . Характеризует степень устойчивости, до 1,5.
2. резонансная частота ω_p .
3. полоса пропускания $A(\omega_w) = \frac{1}{2}$.

Интегральные показатели По ошибке в переходном процессе.

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^2(\tau) d\tau.$$

2.4.2 Установившегося режима

$W_{eg}(s)$ — передаточная функция с задающего воздействия на ошибку регулирования. Установившийся режим будет

$$e(t) = e_0 g(t) + e_1 g'(t) + e_2 g'' + \dots \quad (2.21)$$

$$e_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} \quad (2.22)$$

e_0 — установившаяся ошибка. $e_0 = 0$ — система астатична. Если в разомкнутой системе присутствует интегратор ($W(s) = \frac{1}{s^k} W_0(s)$), то система замкнутая обратной связью астатична.

2.5 Простейшие методы построения регуляторов

Принцип обратной связи позволяет свести задачу управления к задаче стабилизации в нуле ошибки регулирования. Т.е. к асимптотической устойчивости в нуле ошибки регулирования.

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Теорема 2. *Критерий устойчивости Михайлова: годограф $a(j\omega)$ начинается на положительной полуоси и имеет приращение аргумента $\Delta\phi = n\frac{\pi}{2}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.*

Теорема 3. *Критерий устойчивости Найквиста: Система, замкнутая отрицательной обратной связью устойчива, если годограф разомкнутой системы охватывает (против часовой стрелки) точку $(-1, 0j)$ $\frac{m}{2}$ раз, где m — число неустойчивых корней разомкнутой системы.*

Уменьшение установившейся ошибки и динамического запаздывания — за счет увеличения коэф. усиления. Но он ограничен запасом устойчивости. Добавление интегратора в разомкнутую систему — астатизм. Принцип инвариантности ошибки от задающего воздействия — добавление компенсатора. Компенсатор физ. нереализуем.

2.5.1 ПИД регулятор

$$R(S) = k_p + k_d s + k_i \frac{1}{s}. \quad (2.23)$$

- k_p — изменение коэффициента усиления, “давим” ошибку, но уменьшаем запас устойчивости,
- k_i — обеспечивает астатизм, увеличивает время регулирования
- k_d — увеличивает запас устойчивости, уменьшает перерегулирование, не влияет на точность.

Метод Зинглера-Николя. $k_i = k_d = 0$. Увеличиваем k_d , до значения k_c , при котором начнутся колебания с периодом P_c . Тогда берем либо $k_p = 0,5k_c$, либо $k_p = 0,45k_c$, $k_i = 1,2k_p/P_c$, либо $k_p = 0,6k_c$, $k_i = 2k_p/P_c$, $k_d = k_p P_c/8$.

2.5.2 Метод Солодовникова

При последовательном включении регулятора ЛАЧХ суммируются. Диаграммы Солодовникова определяют связи изданных параметров качества и частотных параметров. Подбирается регулятор с нужной ЛАЧХ.

2.5.3 Метод обратной динамики

Дает сразу компенсатор и регулятор. Подходит для нелинейных систем. Рассмотрим систему вида

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + u.$$

Пусть уравнение ошибки $e = g - x$ имеет вид

$$\ddot{e} + a'\dot{e} + a'' = 0,$$

подставляем сюда уравнение и выражение для ошибки. Полученный компенсатор и/или регулятор могут быть физически нереализуемы. Замена дифференцирующих звеньев форсирующими.

2.5.4 Метод пространства состояний

Теорема о разделении. Для управляемой и наблюдаемой системы можно построить обратную связь по состоянию, задающую замкнутой системе наперед заданный спектр, и наблюдатель состояния с наперед заданным спектром. Если замкнуть исходную систему регулятором, составленным из наблюдателя и о.с. по состоянию, то спектр замкнутой системы будет объединением спектров наблюдателя, и желаемого спектра системы.

2.5.5 По желаемой передаточной функции

$$W_t(s) = \frac{R(s)W(s)}{1 + W(s)R(s)} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{W} \frac{W_g}{1 - W_g}.$$

Однако, для обеспечения грубости нельзя допускать сокращения неустойчивых нулей и полюсов $W(S)$ и за счет $R(s)$. Требуется факторизация $W(s)$ по этому признаку, $W_g = \frac{\beta_+\beta_-}{\alpha_+\alpha_-}$, α_+ , β_+ — неустойчивые и нейтрально устойчивые. На $W_g(s)$ накладываются ограничения.

$$W_g(s) = \frac{\beta_+(s)M(s)}{G(s)}, \quad (2.24)$$

$$1 - W_g(s) = \frac{\alpha_+(s)N(s)s^r}{G(s)}. \quad (2.25)$$

2.5.6 Синтез систем с максимальной степенью устойчивости

Метод основан на преобразовании комплексной плоскости вида $\tilde{s} = s - \eta$ и условиях маргинальной устойчивости. Для типовых систем известны оптимальные параметры типовых регуляторов.

2.5.7 Синтез управления для систем с запаздыванием

Приближение звена чистого запаздывания $e^{-\tau s}$ разложением в ряд Тейлора.

$$W^-(s) = 1 - \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2}, \quad (2.26)$$

$$W^+(s) = \left(1 + \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2}\right)^{-1}, \quad (2.27)$$

$$W^{(2)}(s) = \frac{1 + \tau/2s + \frac{(\tau/2s)^2}{2}}{1 - \tau/2s + \frac{(\tau/2s)^2}{2}} \quad (2.28)$$

2.6 Дискретные системы

Присутствует квантование по времени или по уровню.

1. По уровню — импульсные.
2. По времени — релейные.
3. По времени и уровню — цифровые.

2.6.1 Импульсные системы

T — период квантования по времени. Импульс — сигнал, не обращающийся в нуль на интервале от 0 до τ . Модуляция непрерывного импульсного сигнала в импульсном элементе. Амплитудно импульсная модуляция (АИМ) — изменение амплитуды A импульсного сигнала, широтно-импульсная — изменение длительности сигнала. При АИМ 1-ого рода значение входного сигнала берется в дискретные моменты времени. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ) — изменение длительности импульса. Широкое применение но на низкой частоте существенно нелинейна.

Решетчатые функции:

$$x(t) \rightarrow x[lT] \text{ или } x[(l + \epsilon)T]$$

2.6.2 Способы описания систем

Разностные уравнения

$$y(t + nT) + a_{n-1}y(t + (n - 1)T) + \dots + a_0y(t) = b_nu(t + nT) + \dots + b_0u(t)$$

Представление решений однородных разностных уравнений, устойчивость разностных уравнений,

Разностные уравнения в пространстве состояний

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_ny_n = cx_n$$

Передаточные функции E — оператор смещения на T . Z-преобразование:

$$X^*(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x[lT]z^{-l},$$

где $|x[lT]| < Mq^l$ и $x[lT] = 0$ при $l < 0$. Теорема запаздывания и опережения.

Передаточная функция в Z-преобразованиях.

Временные функции Весовая и переходная функции.

2.6.3 Системы с АИМ

Линейность элементов с АИМ.

Переход от импульсного звена к идеальному (простейшему) импульсному звену и формирующему элементу. Результирующее описание всей системы дискретной передаточной функцией.

Фиксатор нулевого порядка.

Структурные схемы с импульсными элементами.

Связь между непрерывной и дискретной системой. Приближение передаточной функции дискретной системы передаточной функцией непрерывной при !!!!!.

2.6.4 Системы с ШИМ

При выполнении условия $T \ll 1$ возможна линеаризация.

2.6.5 Цифровые системы управления

Цифровая система общего вида: дискретная и непрерывная часть, ЦАП и АЦП между ними. При достаточно малом интервале квантования по уровню приближаются импульсными. В схеме импульсной системы появляется еще одно дискретное звено перед импульсным элементом.

2.6.6 Устойчивость и показатели качества

Алгебраические и частотные критерии. Основа — корни характеристического полинома свободной части.

$$v = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Сходимость к нулю за конечное время.

2.6.7 Методы синтеза систем управления

Почти полная аналогия с непрерывным случаем. Построение дискретной системы управления по непрерывной.

2.7 Основные методы идентификации систем

Идентификация — получение математического описания или модели объекта управления. В зависимости от типа объекта — различные методы идентификации (для линейных и нелинейных, дискретных и непрерывных, стационарных и нестационарных). Модель не является описанием, а имитирует существенные свойства реального объекта.

Структурная и параметрическая идентификация.

Методы идентификации:

- Активные (можно подавать на вход объекта тестовые сигналы) и пассивные.
- Детерминированные и статистические (учитывают наличие шума).
- Оперативные (идентификация проходит “налету”) и ретроспективные.

На основе априорной информации об объекте ограничивается множество (структура) моделей \mathbb{W} , выбирается критерий идентификации

$J(w, P)$, определяющий насколько данная модель w соответствует к экспериментальным данным P . Теперь задачу идентификации можно рассматривать, как задачу минимизации $J(w, P)$ на \mathbb{W} . Некорректность задачи идентификации. Общая методика подразумевает итерационный подход: выбор структуры и критерия, определение параметров, верификация, корректировка структура, изменение критерия..

2.7.1 Структурная идентификация

Выделение объекта, определение выходов и входов, определение характера связей между ними. Аналитическое составление моделей (выписываются уравнения физических законов, описывающих объект).

2.7.2 Индефикация статических характеристик

Модель объекта имеет вид

$$y = f(x).$$

Статистический метод: строим эмпирическое условное распределение $\phi(y|x)$ и берем мат. ожидание $\hat{f}(x) = E(y|x)$. Метод наименьших квадратов для линейных моделей:

$$y = F(x) = (a, x), \quad J = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2,$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},$$

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

2.7.3 Индефикация при детерминированных воздействиях

Определение переходной характеристики Проведение нескольких экспериментов, либо применение сглаживания скользящим усреднением (последнее эквивалентно фильтру низких частот).

Частотные методы Линейные объекты. Определяются экспериментальные АФЧХ. Полоса пропускания оценивается по переходной характеристике $\omega_m a x = 300/t_p$????

На вход системы подается периодический сигнал (или сумма периодических). Далее методом вычисления корреляций или при помощи преобразования Фурье получаются оценки АЧХ и ФЧХ. Аддитивный несмещенный шум не влияет на математическое ожидание оценки. Дисперсия оценки в случае белого шума стремится к 0. Для корреляционного метода:

$$K_{yu}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \sin(\omega(t-w)) \dot{W}[U_0 \sin \omega t] dt + K_{fu}(0) \quad (2.29)$$

$$\hat{R}(\omega) = \frac{2}{U_0^2} \sqrt{K_{yu}^2(0) + K_{yu}^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}, \quad (2.30)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{K_{yu}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}{K_{yu}(0)}. \quad (2.31)$$

При заданной структуре передаточной функции определение ее параметров можно осуществлять при помощи метода наименьших квадратов по экспериментальной АФЧХ или коэффициентам Фурье входа и выхода. (Связь между преобразованием Лапласа и преобразованием Фурье)

Методы пространства состояния Рассматриваются импульсные системы и строится модель вида

$$a(z)y = b(z)u + c(z)e,$$

где y — выход, u — вход, e — белый шум, z — оператор задержки, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — полиномы. AR, ARX, ARMAX модели. Общее представление авторегрессионных моделей:

$$y(t+1) = \phi^T(t)\theta + \mu(t)$$

где ϕ — вектор регрессоров.

Вычисление параметров методом наименьших квадратов. Предварительная обработка данных. Статистическая трактовка — метод наибольшего правдоподобия.

Глава 3

Построение СУ роботов

3.1 Математическое описание привода

Электрические приводы.

3.2 Математическое описание манипуляторов

3.2.1 Системы со связями, формализм Лагранжа

3.2.2 Кинематическая модель

3.2.3 Динамическая модель

3.2.4 Динамическая модель с приводами

3.3 Математическое описание мобильных роботов

Рассматриваются только наземные системы передвижения. Колесные системы наиболее распространены, просты по устройству и управлению, но обладают относительно плохой проходимостью. Гусеничные системы передвижения лучше по проходимости. Системы на основе ног очень сложны в управлении, но должны обеспечивать лучшую проходимости и маневренность.

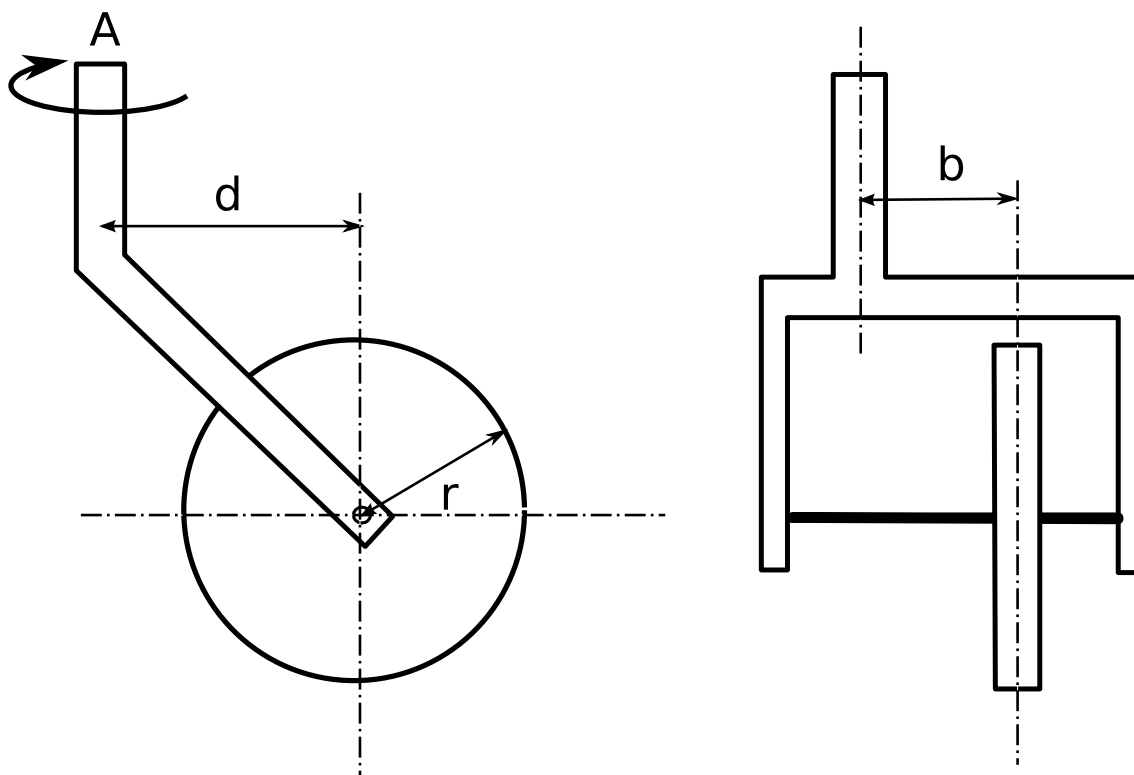


Рис. 3.1: Колесо

3.3.1 Колеса, неголономные ограничения

Общая схема колеса приведена на рисунке. Мы будем рассматривать колеса с $b = 0$.

Классификация колес:

Жестко закрепленные колеса $d = 0$, нет возможности вращения вокруг A .

Рулевые колеса $d \neq 0$, колесо может поворачиваться вокруг A .

Рояльные колеса $d \neq 0$, колесо может поворачиваться вокруг A .

Наличие колес вводит следующие ограничения:

Условие непроскальзывания Проекция скорости точки B на ось By_w равна 0: $(V_B)_{y_w} = 0$.

Условие качения Проекция скорости точки B на ось Bx_w равна $r\dot{\varphi}$: $(V_B)_{x_w} = r\dot{\varphi}$, φ — угол поворота колеса вокруг своей оси.

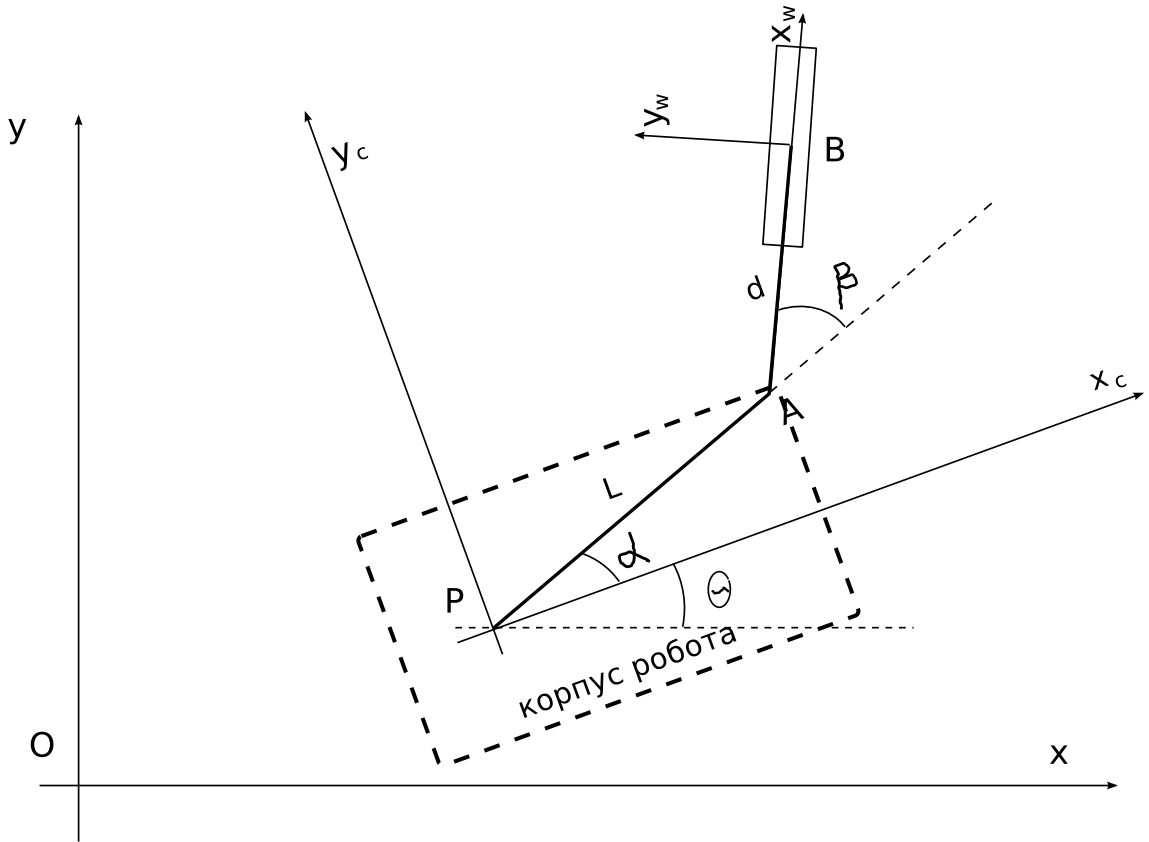


Рис. 3.2: Робот с колесом

$$\bar{OB} = \bar{OP} + \bar{PA} + \bar{AB} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + R(\theta) \left(\begin{bmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \cos(\alpha + \beta) \\ d \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \right),$$

где $R(\theta)$ — матрица поворота на угол θ .

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Дифференцируем по времени (помним, что $R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = R^T(\theta)$, $\dot{R}(\theta) = R(\theta + \frac{\pi}{2})\dot{\theta}$):

$$\frac{d\bar{OP}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + R(\theta) \begin{bmatrix} -d \sin(\alpha + \beta) \\ d \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \dot{\theta} + R(\theta + \frac{\pi}{2})\dot{\theta} \left(\begin{bmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \cos(\alpha + \beta) \\ d \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \right).$$

Теперь найдем проекции на оси Bx_w и By_w , скалярно домножив на со-

ответствующие орты $(R(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$ и $R(\theta) \begin{bmatrix} -\sin(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix})$, получим

$$(V_B)_{x_w} = [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta)] R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + l \sin \beta \dot{\theta}$$

$$(V_B)_{y_w} = [-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta)] R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + d\dot{\beta} + (d + l \cos \beta)\dot{\theta}.$$

Подставим ограничения и обозначим

$$\bar{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned} [-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad d + l \cos \beta] \bar{R}(-\theta) \dot{\xi} + d\dot{\beta} &= 0 \\ [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] \bar{R}(-\theta) \dot{\xi} &= r\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Второе уравнение в (3.1) не налагает ограничений, т.к. мы можем выбирать скорость вращения колеса $\dot{\varphi}$. В случае $d \neq 0$ (рояльное колесо) первое уравнение тоже не налагает ограничений. В случае рояльного колеса первое уравнение также не налагает ограничений на скорость, т.к. скорость поворота может. Для рулевых и закрепленных колес возникают ограничения вида

$$C(\beta_s) \bar{R}(\theta) \dot{\xi} = 0, \quad \text{где } C(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_f \\ C_s(\beta_s) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

C_f соответствует закрепленным колесам, $C_s(\beta_s)$ — рулевым, β_s — их углы поворота.

Типы колесных мобильных роботов

Индекс мобильности — $\delta_m = 3 - \text{rank } C(\beta_s)$.

Индекс руления (degree of steerability) — $\delta_s = \text{rank } C_s(\beta_s)$.

Системы с колесами можно классифицировать по паре этих индексов (δ_m, δ_s) :

Тип (3, 0) Системы способные двигаться в любом направлении (все колеса рояльные).

Тип (2, 0) Дифференциальный привод (unicycle): пара независимо управляемых колес, расположенных на одной оси.

Тип (2, 1) Одно колесо рулевое, остальные — рояльные. Пример: цирковой велосипед.

Тип (1, 1) Автомобиль. Есть и закрепленные, и рулевые.

Тип (1, 2) Не менее двух рулевых колес.

3.3.2 Уравнения движения колесного мобильного робота

Кинематические модели любой сложности можно получить из (3.1).

С учетом ограничений (3.2) **кинематика позиции робота** будет описываться уравнением вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \bar{R}(\theta)\Sigma(\beta_s)u_\varphi = \sum_{i=1}^{\delta_m} X_i(\theta, \beta_s)u_{\varphi i}, \\ \dot{\beta}_s &= u_s.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Позиция робота — вектор $\xi = (x, y, \theta)^T$. Ранг матрицы $\Sigma(\beta_s)$ равен индексу мобильности. Эти уравнения не учитывают рояльные колеса (они считаются свободными). u_φ имеет смысл скоростей вращения колес.

Если в фазовый вектор добавить углы поворота рояльных колес β_c и углы φ , на которые повернуты колеса вокруг оси, то получится **кинематическая модель с учетом конфигурации**. Конфигурация — полное описание положения всех колес и управляющих органов. Ее можно явно получить из (3.1). Вектор конфигурации $q = (\xi, \beta_s, \beta_c, \varphi)^T$. Общий вид уравнения:

$$\dot{q} = S(q)u.\tag{3.4}$$

Динамическая модель может быть получена с применением формализма Лагранжа:

$$M(\beta)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = \tau + J^T(q)\lambda.$$

Обобщенные силы, обеспечивающие выполнение ограничений, присутствуют в правой части в явном виде, однако, соответствующее слагаемое полностью исчезает при домножении слева на $S^T(q)$. Для учета кинематики уравнение (3.4) дополняется уравнением

$$H(q)\dot{u} + F(q, u) = S^T(q)\tau.\tag{3.5}$$

Кинематические уравнения робота с дифференциальным приводом

Модель описывает кинематику точки, расположенной между колесами робота.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{r(\dot{\varphi}_+ + \dot{\varphi}_-)}{2} \cos \theta, \\ \dot{y} &= \frac{r(\dot{\varphi}_+ + \dot{\varphi}_-)}{2} \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{r(\dot{\varphi}_+ - \dot{\varphi}_-)}{2R} \end{aligned}$$

r — радиус колес, R — половина расстояния между колесами.

Если мы рассматриваем скорости вращения колес ($\dot{\varphi}_+$ и $\dot{\varphi}_-$) как управления, то можно переобозначить входы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= u_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Кинематика автомобиля

Модель описывает кинематику точки, расположенной между задними колесами.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{u_1}{L} \operatorname{tg} \beta, \\ \dot{\beta} &= u_2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

L — расстояние от точки крепления передних колес, до оси задних. $u_1 = r\dot{\varphi}$ — скорость вращения задних колес.

3.4 Управление манипуляторами

3.5 Управление движением мобильных роботов

Существуют различные постановки задачи управления движением мобильного робота:

- Движение по траектории без привязки ко времени (движение по кривой). Задана кривая \mathcal{C} вдоль которой должна двигаться точка корпуса P .
- Движение по заданной траектории с привязкой ко времени. Задана траектория $(x_r(t), y_r(t))$ по которой должна двигаться точка корпуса P . Возможно задание траектории с ориентацией: $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$. Не всякая траектория **физически реализуема (допустима)**. Допустимые траектории являются решениями уравнений кинематики робота (3.3).
- Стабилизация в заданном положении (x_r, y_r, θ_r) .

3.5.1 Управление с учетом динамики робота

Использование модели динамики позволяет увеличить точность и быстродействие системы управления. Она позволяет явно учитывать различные ограничения (максимальные моменты двигателей и т.п.). Однако, при этом значительно увеличивается сложность системы управления. Многие роботы спроектированы так, что приводы имеют систему управления, позволяющую управлять скоростью, тогда задача управление динамикой решается на уровне привода. В дальнейшем будут рассмотрены только методы управления по кинематической модели, т.к. динамику (3.5) можно компенсировать следующим методом:

$$\tau = (S^T(q))^+[H(q)w + F(q, u)u],$$

где $(S^T(q))^+$ — правая обратная матрица для S^T ($A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n < m$, тогда $A(A)^+ = I_n$). Следует заметить, что обычно управление осуществляется не за счет всего вектора τ (например, есть свободно вращающиеся колеса), тогда $S^T(q)$ заменяется на матрицу с меньшим числом столбцов, но если система остается управляемой (необходимое условие — число управлений не меньше суммы индекса мобильности и индекса руления) то правая обратная матрица режнему должна существовать.

Уравнения кинематики переходят в

$$\dot{u} = w.$$

И, если мы имеем закон управления $u = u^*(q, t)$ для кинематики робота, то задачу управления с учетом динамики решит обратная связь

$$w = -k(u - u^*(q, t)) + \frac{\partial u^*}{\partial q}(q, t)\dot{q} + \frac{\partial u^*}{\partial t}(q, t),$$

здесь $k > 0$, а $\dot{q} = S(q)u$ (в соответствии с (3.4)).

3.5.2 Движение по заданной кривой

При рассмотрении этой задачи обычно используется система координат Френета. Мы будем рассматривать эту задачу применительно к роботу дифференциальным приводом.

Система координат Френета

Пусть задана кривая \mathcal{C} параметризованная собственной длиной s . $c(s)$ — кривизна. P — точка корпуса, движением которой мы управляем.

P_m — точка корпуса, расположена на середине оси колес робота.

P_s — ортогональная проекция P на кривую \mathcal{C} . Однозначна, если расстояние до кривой меньше радиуса кривизны: $d(P, \mathcal{C}) < R(s) = \frac{1}{c(s)}$.

В системе координат Френета положение робота описывается координатами (s, d, θ) :

- s — криволинейная координата P_s . Значение параметра s кривой, соответствующее точке P_s .
- d — длина отрезка PP_s (расстояние от P до кривой).
- $\theta_e = \theta - \theta_s$.

Выпишем уравнения кинематики точки P . (Кинематика точки P_m описывается (3.6).

$$\dot{\theta}_e = \theta - c(s)\dot{s}.$$

(По определению кривизны $\frac{\partial \theta_s}{\partial s} = c(s)$).

Пары векторов $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s$ и $\mathbf{j}_m, \mathbf{j}_m$ — орты осей соответствующих систем координат, связанных с точками P_s и P_m соответственно. Все скорости рассматриваются относительно системы координат Oxy , связанной с землей.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}_s &= c(s)\dot{s}\mathbf{j}_s, & \dot{\mathbf{j}}_s &= -c(s)\dot{s}\mathbf{i}_s, \\ \dot{\mathbf{j}}_m &= \dot{\theta}\mathbf{j}_m = u_2\mathbf{j}_m, & \dot{\mathbf{j}}_m &= -\dot{\theta}\mathbf{j}_m = -u_2\mathbf{j}_m. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}OP_s &= \dot{s}\mathbf{i}_s, & \frac{d}{dt}P_sP &= \frac{d}{dt}(d\mathbf{j}_s) = \dot{d}\mathbf{j}_s - dc(s)\dot{s}\mathbf{i}_s, \\ \frac{d}{dt}OP_m &= u_1\mathbf{j}_m, & \frac{d}{dt}P_mP &= \frac{d}{dt}(l_1\mathbf{j}_m + l_2\mathbf{j}_m) = l_1u_2\mathbf{j}_m - l_2u_2\mathbf{j}_m. \end{aligned}$$

(l_1, l_2) — координаты P относительно P_m .

Теперь, учитывая

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_m \\ \mathbf{j}_m \end{bmatrix} = R(-\theta) \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{j}_s \end{bmatrix},$$

подставляя все это в тождество

$$\frac{d}{dt}(OP_s + P_sP) = \frac{d}{dt}(OP_s + P_sP)$$

и приравнявая выражения при ортах \mathbf{i}_s и \mathbf{j}_s , получим

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{1 - dc(s)} [(u_1 - l_2u_2) \cos \theta_e - l_1u_2 \sin \theta_e], \\ \dot{d} &= (u_1 - l_2u_2) \sin \theta_e + l_1u_2 \cos \theta_e, \\ \dot{\theta}_e &= u_2 - c(s)\dot{s}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Первое уравнение вырождается при нарушении условия $1 > dc(s) = \frac{d}{R(s)}$.

Линейный закон управления

Пусть $l_2 = 0, l_1 \neq 0$. Фиксируем скорость Тогда мы можем применить метод обратной динамики ко второму уравнению в (3.8). Потребуем, чтобы уравнение динамики ошибки регулирования d было

$$\dot{d} = -l_1u_1k(d, \theta_e)d,$$

тогда управление будет

$$u = -\frac{u_1}{l_1 \cos \theta_e} \sin \theta_e - \frac{u_1}{\cos \theta_e} k(d, \theta_e)d. \tag{3.9}$$

Можно доказать (доказательство основано на рассмотрении знака $\dot{\theta}_e$ при $|\theta_e| \rightarrow \frac{\pi}{2}$), что при выполнении условий

- $l_1u_1 > 0$,
- $k(d, \theta_e) > 0$, при $|\theta_e| \rightarrow \frac{\pi}{2} k(d, \theta_e) \rightarrow 0$,

$$|\theta_e(0)| < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{l_1c_{max}}{1 - |d(0)|c_{max}} < 1,$$

$$\int_0^t u_1(s)ds \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow +\infty,$$

на протяжении всего движения будет выполнено неравенство

$$|\theta_e| < \frac{\pi}{2}$$

и $d \rightarrow 0$.

Переход к цепочечной форме

Пусть $l_1 = l_2 = 0$. Преобразование координат и входов

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z_3) &= (s, d, [1 - dc(s)] \operatorname{tg} \theta_e), \\ (v_1, v_2) &= (\dot{z}_1, \dot{z}_3)\end{aligned}\tag{3.10}$$

приводит систему (3.8) к цепочечной форме

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1, \\ \dot{z}_2 &= v_1 z_3, \\ \dot{z}_3 &= v_2.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Для стабилизации полученной системы в цепочечной форме можно использовать обратную связь

$$v_2 = -v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3.\tag{3.12}$$

Доказательство устойчивости основано на использовании функции Ляпунова $V(z) = \frac{1}{2}(z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2)$.

Если кинематика системы описана не в системе координат Френета, то обычно используется преобразование

$$(z_1, z_2, z_3) = (x, y, \operatorname{tg} \theta).\tag{3.13}$$

3.5.3 Движение по заданной траектории

Движение по траектории без контроля ориентации

Пусть задана траектория $(x_r(t), y_r(t))$.

Кинематика точки P при $l_2 = 0$ будет описываться уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l_1 \sin \theta \\ \sin \theta & l_1 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Получить эти уравнения можно подстановкой оси Ox вместо кривой C (3.8), или прямым вычислением зависимости скорости P от управлений.

Если $l_1 \neq 0$, то матрица в (3.5.3) невырождена, то систему можно линеаризовать обратной связью, назначив новые входы

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -l_1 \sin \theta \\ \sin \theta & l_1 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Движение по заданной траектории с контролем ориентации

Пусть задана допустимая траектория $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$, тогда существуют соответствующие управления $(u_{1r}(t), u_{2r}(t))$.

В качестве ошибки регулирования будем использовать положение относительно системы координат, связанной с желаемым положением робота.

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{bmatrix}$$

Продифференцировав эти уравнения, можно получить динамику ошибки. После этого можно перейти к цепочечной форме (используя (3.13) и $w_1 = u_1 \cos \theta_e - u_{1r}$, $w_2 = \frac{u_2 - u_{2r}}{\cos^2 \theta_e}$) и применить управление

$$\begin{aligned} w_1 &= -k_1 |u_{1r}| (z_1 + z_2 z_3), \\ w_2 &= -k_2 u_{1r} z_2 - k_3 |u_{1r}| z_3. \end{aligned}$$

Доказательство — на основе функции Ляпунова $V(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2)$.

3.5.4 Стабилизация в заданном положении

Сложная задача (робот не может ехать боком). По теореме Брокетта не существует непрерывной стационарной обратной связи по состоянию, решающей задачу. Используются различные методы (приведены простейшие примеры):

- **Нестационарная непрерывная обратная связь** К обратной связи (3.12) добавим

$$v_1 = -k_1 z_1 + \alpha \|(z_2, z_3)\| \sin t,$$

Возмущение $\sin t$ позволит делать маневры для движения “боком”.

- **Разрывные обратные связи** Обратная связь разрывна в точке, куда должна сойтись система.
- **Гибридные системы** Непрерывная + дискретная.