Методы идентификация модели объекта управления: представление модели объекта

Гончаров Олег Игоревич

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Москва

Идентификация систем

Идентификация — получение математического описания или модели объекта управления.

- Модель не является описанием, а имитирует существенные свойства реального объекта.
- В зависимости от типа объекта — различные методы идентификации (для линейных и нелинейных, дискретных и непрерывных, стационарных и нестационарных).
- Структурная идентификация — определяется структура модели: выделение модели, входов, выходов, их взаимное влияние. Аналитическое составление модели.
- Параметрическая идентификация — определяются значения параметров модели с известной

Методы идентификации

- Активные (можно подавать на вход объекта тестовые сигналы) и пассивные.
- Детерминированные и статистические (учитывают наличие шума).
- Оперативные (идентификация проходит “налету”) и ретроспективные.

Общий алгоритм идентификации

1. Конструирование модели:
    1. Планирование эксперимента и получение данных: данные для идентификации и верификации.
    2. Выбор множества моделей.
    3. Выбор критерия согласия.
2. Расчет модели: оптимизация значения критерия на множестве моделей в соответствии полученными данными.
3. Подтверждение (верификация) модели: проверка модели на экспериментальных данных.

Обычно для верификации оставляют примерно $1/3$ данных, полученных при эксперименте.

Если результат верификации неудовлетворительный — возврат к началу.

Модель идентифицируемого объекта

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g_c(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$$

Дискретное время $t_k = kT$, T — выборочный интервал:

$$u(t) = u_k, \text{ при } kT \le t \le (k+1)T,$$

$$y[lT] = \sum_{i=1}^{\infty} g[iT] u[(l-i)T], \text{ где } g(t) \stackrel{def}{=} \int_t^{t+T} g_c(\tau)\, d\tau.$$

Вводим оператор опережения $Eu(t) = u(t+T)$,

$$y[lT] = \left(\sum_{k=1}^{\infty} g[kT] E^{-k} \right) u[lT],$$

$$y[lT] = G(E) u[lT], \text{ где } G(E) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g[kT] E^{-k}.$$

Модель идентифицируемого объекта

$$y[lT] = G(E)u[lT], \text{ где } G(E) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g[kT]E^{-k}.$$

Переходим к Z-изображениям:

$$Y(z) = G(z)U(z), \text{ где } G(z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g[kT]z^{-k}.$$

Объект называется устойчивым (строго устойчивым), если

$$\sum_{k=1}^{\infty} g[kT] < \infty \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} kg[kT] < \infty \right).$$

Утверждение

Если передаточная функция $G(z)$ дробно-рациональная и асимптотически устойчива, то объект строго устойчив.

Модель помехи

$$y[lT] = G(E)u[lT] + v[lT],$$

где $v[lT]$ — помеха.

- Шум наблюдения. Датчики-измерители сигналов подвержены влиянию шума и дрейфа.
- Неконтролируемые входы. В системе есть не измеряемые входные сигналы.

$$v[lT] = \sum_{k=0}^{\infty} h[kT]e[(l-k)T],$$

где $e[kT]$ — белый шум, т.е. последовательность случайных величин:

- взаимно независимых,
- имеющих одинаковое распределение.

$$\boxed{y[lT] = G(E)u[lT] + H(E)e[lT].}$$

Представления о случайных процессах

- Случайный процесс $s(\cdot)$ — последовательность с.в. $s(t)$, $t = 1, 2, \ldots$
- Математическое ожидание: $m_s(t) = E\, s(t)$.
- Дисперсия: $E(s(t) - m_s(t))^2$.
- Ковариационные функции:
  $R_s(t_1, t_2) \stackrel{def}{=} E\, s(t_1)s(t_2), \quad R_{ws}(t_1, t_2) \stackrel{def}{=} E\, w(t_1)s(t_2).$

Упражнение: Пусть

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(t)e(t-k),$$

где $e(t)$ — белый шум, с распределением $N(0, \lambda)$, доказать

$$m_v(t) = E\, v(t) = 0,$$

$$R_v(t, t-\tau) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-\tau) = R_v(\tau).$$

Спектр случайных процессов

- Стационарный случайный процесс $s(t)$:
  1. $E\,s(t) = m_s = const$,
  2. $R_s(t, t-\tau) = R_s(\tau)$.
- Квазистационарный случайный процесс $s(t)$:
  1. $E\,s(t) = m_s(t)$, $|m_s(t)| \le C$,
  2. $|R_s(t, t-\tau)| \le C$, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{\infty} R_s(t, t-\tau) = \bar{R}_s(\tau)$.
- Спектр сигнала и взаимный спектр сигналов:

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau)e^{-j\omega\tau}, \Phi_{sw}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{sw}(\tau)e^{-j\omega\tau},$$

  где сигналы $s(t)$ и $w(s)$ квазистационарные.

Упражнение: Пусть $v(t) = H(E)e(t)$, $e(t)$ — белый шум с дисперсией λ, доказать $\Phi_v(\omega) = \lambda|H(j\omega)|^2$.

Теорема

Пусть $v(t) = H(E)e(t)$, $H(E)$ — устойчив, $e(t)$ — квазистационарный, тогда $\Phi_v(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_e(\omega)$, $\Phi_{ve}(\omega) = H(e^{j\omega})\Phi_e(\omega)$.

Периодограмма

Рассмотрим сигнал $s[lT]$ на отрезке $l = \overline{1, N}$.
Периодограмма: ДПФ от $s[lT]$ на $l = \overline{1, N}$

$$S_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} s[kT] e^{-j\omega kT},$$

определена для частот $\omega = \frac{2\pi k}{NT}$, где $k = \overline{1, N}$.

Теорема

Пусть $y[lT] = G(E)u[lT]$, $G(E)$ — строго устойчива, $|u[lT]| \leq C_u$, тогда

$$Y_N(\omega) = G(e^{j\omega})U_N(\omega) + R_N(\omega), \text{ где } |R_N(\omega)| \leq 2C_u \cdot \frac{C_g}{\sqrt{N}},$$

причем, если сигнал имеет период NT, то $R_N(\omega) = 0$.

Пусть $y(t)$, $u(t)$ — квазистационарные с.п.,
$y^N(t)$, $u^N(t)$ — их реализации на отрезке $t = \overline{1, N}$.

При определенных условиях:

- В частотной области

$$E\left|Y_N(\omega)\right|^2 \text{ слабо сходится к } \Phi_y(\omega)^1.$$

- Во временной области

$$\hat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)u(t-\tau) \text{ сходится к } R_u(\tau),$$

$$\hat{R}_{yu}^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=\tau}^{N} y(t)u(t-\tau) \text{ сходится к } R_{yu}(\tau).$$

[1] относительно множество тестовых функций с ограниченной суммой коэффициентов Фурье.

Использование модели объекта

Полученная модель объекта (процесса) может быть использована для решения следующих задач:

- Моделирование:
  по заданному входу $u^*[lT]$
  построить оценку выхода объекта $y^*[lT]$.
- Прогнозирование:
  по истории значений выхода $y[lT]$ и входа $u[lT]$, $l = \overline{-\infty, t}$
  построить оценку выхода $y[(t+1)T]$.
- Синтез регуляторов:
  - Построение оценки $G(e^{j\omega})$ для использования классических частотных методов.
  - Управление по минимуму дисперсии: $E\, y(t)^2 \to min$.
  - Формирование спектра шума: $y = R(E)e$.
  - Синтез по желаемой передаточной функции.

Предсказатель шума

Необходимо обращение модели шума:

$$v(t) = H(E)e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h[kT]e[(l-k)T],$$

где $H(E)$ устойчива и $h(0) = 1$.

Теорема

Пусть $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$, $1/H(z)$ *аналитична в* $|z| \geq 1$,
тогда $H(E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}(k)z^{-k}$,
где $\tilde{h}(k)$ *взяты из разложения* $1/H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}(k)z^{-k}$.

Условие обратимости — отсутствие неустойчивых нулей.

$$v(t) = e(t) + \sum_{k=1}^{\infty} h[kT]e[(l-k)T] = e(t) + (H(E) - 1)e(t),$$

$$\hat{v}(t|t-1) = (1 - H(E)^{-1})v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}(k)v(t-k),$$

Знаем распределение $v(t) \Rightarrow$ знаем доверительный интервал.

Общий вид одношагового предсказателя

Строим предсказатель для объекта:

$$y[lT] = \sum_{k=1}^{\infty} g[kT]u[(l-k)T] + \sum_{k=0}^{\infty} h[kT]e[(l-k)T] \text{ или}$$

$$y(t) = G(E)u(t) + H(E)e(t),$$

где $H(E)$, $G(E)$ устойчивы, $h(0) = 1$, $u(t)$ — известный вход, $e(t)$ — белый шум с моментами $(0, \lambda)$.

Предсказатель:

$$\hat{v}(t|t-1) = (1 - H(E)^{-1})(y(t) - G(E)u(t)),$$

$$\hat{y}(t|t-1) = H(E)^{-1}G(E)u(t) + (1 - H(E)^{-1})y(t)$$

или

$$H(E)\hat{y}(t|t-1) = G(E)u(t) + (H(E) - 1)y(t).$$

Вероятностные модели и предсказатели

- Возможно два равноправных описания системы:
  - вероятностная модель

$$y(t) = G(E)u(t) + H(E)e(t),$$

    заданы фильтры $G(E)$, $H(E)$ и распределение f_e (или моменты $e(t)$).
  - предсказатель

$$\hat{y}(t|t-1) = H(E)^{-1}G(E)u(t) + [1 - H(E)^{-1}]y(t).$$

    заданы фильтры $G(E)$, $H(E)$.

  Следует выбирать более удобную.
- Многошаговые предсказатели.
- Если не учитывать шум, то получаются семейства предсказателей.
- Управления строится с использование одно из форм описания системы.

Линейные регрессии

ARX-модель

$$A(E)y(t) = B(E)u(t) + e(t),$$

где $A(E) = 1 + a_1 E^{-1} + \dots + a_n E^{-n}$, $B(E) = b_0 + \dots + b_m E^{-m}$ — фильтры с конечной импульсной характеристикой, $e(t)$ — белый шум.

Обозначим $\theta = [a_1, a_2, \dots a_n, b_1, \dots b_n]^T$ — вектор параметров модели.

Предсказатель:

$$\hat{y}(t|\theta) = B(E)u(t) + [1 - A(E)]y(t) = \varphi^t(T)\theta,$$

где $\varphi(t) = [-y(t-1), \dots - y(t-n), u(t-1), \dots u(t-m)]^T$ — регрессионный вектор.

Псевдолинейная регрессия

ARMAX-модель

$$A(E)y(t) = B(E)u(t) + C(E)e(t),$$

где $C(E) = 1 + c_1 E^{-1} + \dots + c_k E^{-n}$.

Обозначим $\theta = [a_1, a_2, \dots a_n, b_0, \dots b_n, c_1, \dots c_k]^T$ — вектор параметров модели.

Предсказатель:

$$\hat{y}(t|\theta) = B(E)u(t) + [1 - A(E)]y(t) + [C(E) - 1][y(t) - \hat{y}(t|\theta)] = \varphi^T(t, \theta)\theta,$$

где $\varphi(t) = [-y(t-1), \dots u(t-1), \dots u(t-m), \varepsilon(t-1), \dots \varepsilon(t-k)]^T$ — регрессионный вектор ($\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|\theta)$ — ошибка предсказания).

Модели типа черного ящика и модели на основе физического представления

- Модели типа черного ящика: задана структура модели, коэффициенты неизвестны и не имеют физического смысла. Примеры: FIR, ARX, ARMAX, ARMA и т.п.
- Модели основанные на физических моделях: алгоритм построения

    1. Построение непрерывной модели по физическим законам.
    2. Дискретизация.
    3. Предсказатель: структура аналогична черному ящику, но параметров может быть меньше и они имеют физический смысл.

Модели в пространстве состояния: позволяют восстанавливать состояние. Фильтр Калмана относится к такому типу систем.