Подборка задач для 4 курса

Сдавать до 31.12.17

Вы так просили...

Задача 1. *(баллов: 1, сдач: 3)* Приведите пример устойчивого дифференциального уравнения, переходящего при дискретизации в неустойчивое разностное.

Задача 2. *(баллов: 3, сдач: 2)* Выпишите общее решение разностного уравнения в непрерывном времени

$$y(t-2)+3y(t-1)+2y(t)=t.$$

Что играет в общем решении роль, аналогичную константам в ОДУ?

Задача 3. *(баллов: 1, сдач: 2)* Объясните, почему система с дискретной передаточной функцией, степень числителя которой превосходит степень знаменателя, физически нереализуема.

Задача 4. *(баллов: 1, сдач: 2)* Найдите решение разностного уравнения

$$x(n+2)=x(n+1)+x(n)$$

с начальными условиями $x(0)=x(1)=1$.

Задача 5. *(баллов: 2, сдач: 3)* Укажите условия на коэффициенты a и b, при которых решение разностного уравнения

$$x(n+2)+ax(n+1)+bx(n)=0$$

с начальными условиями $x(0)=x_0, x(1)=x_1$ финитно.

Задача 6. *(баллов: 1, сдач: 5)* Приведите пример дифференциального уравнения и его решения, которое является асимптотически устойчивым, но не является экспоненциально устойчивым.

Задача 7. *(баллов: 2, сдач: 2)* Верно ли, что из условия $x^\top \cdot f(x)>0$ для всех отличных от нуля $x\in\mathbb{R}$ и непрерывности функции $f(x)$ следует устойчивость нуля уравнения

$$\dot{x}+f(x)=0\,?$$

Можно ли это утверждение обобщить на $\mathbb{R}^n$?

Задача 8. *(баллов: 1, сдач: 1)* Найти особые точки, исследовать их тип и устойчивость:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a-bx_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2(c-dx_1); \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2, \\ \dot{x}_2 = \cos x_1; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(2-x_1-2x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(2-2x_1-x_2). \end{cases}$

Задача 9. *(баллов: 2, сдач: 2)* Исследовать устойчивость нуля уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0.$$

Задача 10. *(баллов: 3, сдач: 1)* Построить качественную картину фазовой плоскости системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

при изменении μ от $-\infty$ до $+\infty$.

Задача 11. *(баллов: 2, сдач: 2)* Показать, что система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}], \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}] \end{cases}$$

имеет предельный цикл $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Задача 12. *(баллов: 2, сдач: 1)* Исследовать на устойчивость предельные циклы систем, заданных в полярных координатах

1. $\dot{r} = r(r-1)(r-2)$, $\dot{\theta} = 1$
2. $\dot{r} = r(r-1)^2$, $\dot{\theta} = 1$

Задача 13. *(баллов: 3, сдач: 1)* Доказать, что система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

не имеет предельного цикла.

Задача 14. *(баллов: 2, сдач: 2)* Следует ли из асимптотической устойчивости по Ляпунову устойчивость по Лагранжу? А наоборот? Докажите или приведите контрпримеры.

Задача 15. *(баллов: 3, сдач: 1)* Постройте фазовые портреты следующих уравнений:

1. $\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$
2. $\ddot{x} - (1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$

Задача 16. *(баллов: 2, сдач: 2)* Исследовать устойчивость решений следующего линейного уравнения с переменным параметром

$$\ddot{x} + (2 + e^t)\,\dot{x} + x = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Указание. Рассмотреть решение $x(t,c) = \dfrac{c}{2}\,(1 + e^{-t})$, $c = \mathrm{const}$.

Задача 17. *(баллов: 2, сдач: 2)* Показать, что нестационарная система

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \geqslant 0,$$

экспоненциально устойчива, если выполнены условия:

1°) $\operatorname{Re}\lambda_i(A(t)) \leqslant -\alpha$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$ $\quad (\lambda_i(A(t))$ — собственные значения матрицы $A)$,

2°) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t A^T(\tau)\,A(\tau)\,d\tau < \infty$.

Задача 18. *(баллов: 1, сдач: 1)* Вычислите коммутаторы следующих векторных полей в $\mathbb{R}^3$

1. $\xi_1 = (x, y, z)$ и $\xi_2 = (2, x - y, z + 3)$
2. $\xi_1 = (x^2, x + z, y)$ и $\xi_2 = (y - 2, 3z, z + 3)$
3. $\xi_1 = (z, y, x - z)$ и $\xi_2 = (2z, 3x + 4z, zy + 3)$
4. $\xi_1 = (xyz, 2, z^2)$ и $\xi_2 = (y, xy - y, xz)$
5. $\xi_1 = (1, 3z, xy)$ и $\xi_2 = (2xy, x - y, yz^2)$
6. $\xi_1 = (z, x, y)$ и $\xi_2 = (xz, x + 3y, z - xy)$

Задача 19. *(баллов: 2, сдач: 3)* Двумерное распределение в $\mathbb{R}^3$ задано полем плоскостей, описываемым следующим уравнением. Нарисуйте это распределение. Интегрируемо ли оно?

1. $dz = ydx$
2. $dx = xdx + ydy$