Подборка задач для 3 курса

Сдавать до 31.12.17

Задача 1. *(баллов: 1, сдач: 1)* Вычислите матричную экспоненту e^A от следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 2. *(баллов: 1, сдач: 1)* Вычислите e^{At}, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Задача 3. *(баллов: 2, сдач: 2)* Докажите, что матрицы A и A^T подобны, и укажите матрицу подобия.

Задача 4. *(баллов: 1, сдач: 1)* Используя преобразование Лапласа, вычислите несобственные интегралы и решите уравнения

1. $$\int\limits_0^\infty \frac{xt - \sin xt}{t^3\sqrt{t}} dt$$

2. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin xt}{t(t^4+4)} dt$$

3. $$\int\limits_0^\infty \frac{(1+e^{-xt})\sin xt}{t} dt$$

4. $$x''(t) + 6x'(t) + x(t) = \theta(t-2) - (3t-2)\theta(t-1), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

5.
$$x''(t) - 4x'(t) + 2x(t) = t^2 + 1 + \theta(t+1), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

6.
$$x''(t) - x(t-1) = t, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-1, 0]$$

7.
$$x''(t) - 2x'(t-1) = t, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-1, 0]$$

8.
$$x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) = 1, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-2, 0]$$

9.
$$x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-4, 0]$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Задача 5. *(баллов: 2, сдач: 3)* Используя преобразование Лапласа, решите дифференциальное уравнение Бесселя $tx'' + x' + tx = 0$ с начальными условиями $x(0) = 1, x'(0) = 0$.
Не пугайтесь, ответ получится в виде ряда. Его сумма называется нулевой функцией Бесселя первого рода.

Nota Bene. *Рассмотренная выше техника решения различных задач с помощью преобразования Лапласа называется "Операционным исчислением" и была впервые открыта английским инженером Оливером Хевисайдом.*

Задача 6. *(баллов: 2, сдач: 3)* Докажите, что $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$, при $\operatorname{Re} s > \gamma = \max \operatorname{Re} \lambda_i, \quad \lambda_i \in \sigma(A)$.

Задача 7. *(баллов: 2, сдач: 2)* Найдите передаточные функции систем, заданных следующими тройками (размерности блоков надлежащим образом согласованы). Объясните полученный результат.

$$1) \ \left\{ (c \mid q), \ \left(\begin{array}{c|c} A & A_1 \\ \hline O & A_2 \end{array} \right), \ \left(\begin{array}{c} b \\ \hline O \end{array} \right) \right\},$$

$$2) \ \left\{ (c \mid O), \ \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline A_1 & A_2 \end{array} \right), \ \left(\begin{array}{c} b \\ \hline q \end{array} \right) \right\}.$$

Задача 8. *(баллов: 4, сдач: 2)* Рассмотрим систему (рис. 1б) с $W(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ и знаменатель ее передаточной функции $Q(s) + KP(s)$. Как ведут себя его корни при изменении параметра K от 0 до ∞? Сделайте выводы о значении нулей передаточной функции для применимости глубокой обратной связи.

Задача 9. *(баллов: 1, сдач: 2)*

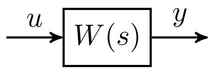


Рис. 1а

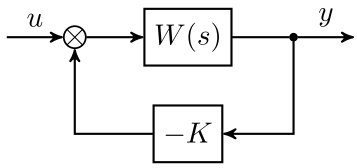


Рис. 1б

Логарифмической чувствительностью величины a по отношению к величине b называется величина $\frac{d\ln a}{d\ln b} = \frac{da/a}{db/b}$, показывающая, как сильно меняется a при изменении b в относительных единицах. Рассмотрим систему и ее замыкание обратной связью с коэффициентом усиления $K > 0$ (рис. 1). Вычислите логарифмические чувствительности передаточных функций обоих систем по отношению к передаточной функции объекта управления $W(s)$. Как ведет себя чувствительность замкнутой системы при увеличении коэффициента обратной связи? Сделайте выводы.

Выражение $W = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ обозначает передаточную функцию системы, имеющей реализацию $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$

Задача 10. *(баллов: 2, сдач: 2)* Пусть система $W = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ скалярная, $h \geqslant 0$,

$$\tau_h(W) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] - e^{-sh} \left[\begin{array}{c|c} A & e^{Ah}B \\ \hline C & 0 \end{array}\right].$$

Опишите, как связаны между собой весовые функции W и $\tau_h(W)$.

Задача 11. *(баллов: 3, сдач: 1)* Пусть система $W = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ скалярная, $h \geqslant 0$,

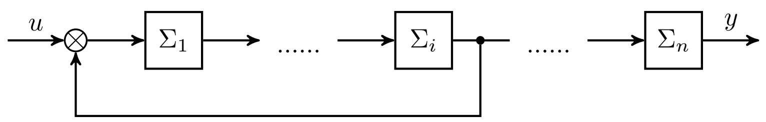
$$\pi_h(W) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline Ce^{-Ah} & 0 \end{array}\right] - e^{-sh} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right].$$

Опишите, как связаны между собой весовые функции W и $\pi_h(W)$.

Задача 12. *(баллов: 2, сдач: 2)* Дано k SISO-систем Σ_i вида

$$\dot{x}^i = A^i x^i + b^i u^i, \quad y^i = c^i x^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Найти описание в пространстве состояний системы, полученной в результате:
— последовательного соединения систем $\Sigma_1 \to \Sigma_2 \to \ldots \Sigma_k$;
— параллельного соединения систем Σ_i;
— соединения обратной связью по схеме



Задача 13. *(баллов: 2, сдач: 3)* Пусть передаточные функции $W(s)$ и $W_1(s)$ имеют весовые функции $k(t)$ и $k_1(t)$, соответственно. Показать, что

$$|k(t) - k_1(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega) - W_1(j\omega)|\, d\omega.$$

Верно ли, что "близость" комплексных коэффициентов передачи влечет "близость" их весовых функций?

Передаточная функция $W(s)$ называется *физически реализуемой* (*каузальной*), если ее весовая функция

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\omega}^{c+j\omega} W(s)\, \varepsilon^{ts} ds \equiv 0 \text{ при } t < 0.$$

Согласно критерию Пэли–Винера, передаточная функция $W(s)$ физически реализуема тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg W(j\omega)|}{1 + \omega^2}\, d\omega < \infty.$$

Задача 14. *(баллов: 2, сдач: 2)* Показать, что физически реализуемая передаточная функция отлична от нуля на любом отрезке мнимой оси $j\omega$.

Задача 15. *(баллов: 2, сдач: 2)* Показать, что для физически реализуемой передаточной функции

$$\int\limits_{0}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

Задача 16. *(баллов: 2, сдач: 3)* Доказать, что функция $\psi(\omega) = \arg \varphi(j\omega)$, где

$$\varphi(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \ldots + a_1$$

является монотонной функцией при $\omega \geqslant 0$, если полином $\varphi(s)$ — гурвицев. Найти асимптотику $\psi(\omega)$ при $\omega \to \infty$.

Задача 17. *(баллов: 2, сдач: 2)* Доказать, что выход $y(t)$ асимптотически устойчивой линейной стационарной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx \end{cases}$$

при ограниченном входе $u(t)$ равномерно непрерывен.

Задача 18. *(баллов: 2, сдач: 2)* Покажите, что уравнение $\dot{x}+x = f(t), \quad |f(t)| \leqslant M$ при $t \in \mathbb{R}$ имеет одно ограниченное решение и найдите его. Докажите, что при периодической $f(t)$ найденное решение будет периодическим.

Задача 19. *(баллов: 2, сдач: 3)* Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ с ограниченной правой частью $|f(t)| \leqslant M$. Пусть корни его характеристического полинома вещественны и отрицательны.

- Найдите решение, ограниченное при $t \in \mathbb{R}$.
- Покажите, что все остальные решение асимптотически стремятся к нему при $t \to +\infty$.
- Покажите, что если $f(t)$ периодическая, то это решение тоже периодическое.