

Подборка задач для 3 курса

Сдавать до 31.12.16

Задача 1. (баллов: 1, сдач: 1) Вычислите матричную экспоненту e^A от следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 2. (баллов: 2, сдач: 2) Докажите, что матрицы A и A^T подобны, и укажите матрицу подобия.

Задача 3. (баллов: 1, сдач: 1) Используя преобразование Лапласа, вычислите несобственные интегралы и решите уравнения

1.

$$\int_0^{\infty} \frac{xt - \sin xt}{t^3 \sqrt{t}} dt$$

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t(t^4 + 4)} dt$$

3.

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 + e^{-xt}) \sin xt}{t} dt$$

4.

$$x''(t) + 6x'(t) + x(t) = \theta(t-2) - (3t-2)\theta(t-1), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

5.

$$x''(t) - 4x'(t) + 2x(t) = t^2 + 1 + \theta(t+1), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

6.

$$x''(t) - x(t-1) = t, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-1, 0]$$

7.

$$x''(t) - 2x'(t-1) = t, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-1, 0]$$

8.

$$x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) = 1, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-2, 0]$$

9.

$$x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t, \quad x(\tau) = x'(\tau) = 0, \tau \in [-4, 0]$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Задача 4. (баллов: 2, сдач: 3) Используя преобразование Лапласа, решите дифференциальное уравнение Бесселя $tx'' + x' + tx = 0$ с начальными условиями $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

Не пугайтесь, ответ получится в виде ряда. Его сумма называется нулевой функцией Бесселя первого рода.

Nota Bene. Рассмотренная выше техника решения различных задач с помощью преобразования Лапласа называется "Операционным исчислением" и была впервые открыта английским инженером Оливером Хевисайдом.

Задача 5. (баллов: 2, сдач: 3) Докажите, что $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$, при $\operatorname{Re} s > \gamma = \max \operatorname{Re} \lambda_i, \lambda_i \in \sigma(A)$.

Задача 6. (баллов: 2, сдач: 2) Найдите передаточные функции систем, заданных следующими тройками (размерности блоков надлежащим образом согласованы). Объясните полученный результат.

$$1) \left\{ (c \mid q), \left(\begin{array}{c|c} A & A_1 \\ \hline O & A_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} b \\ O \end{array} \right) \right\},$$

$$2) \left\{ (c \mid O), \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline A_1 & A_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} b \\ q \end{array} \right) \right\}.$$

Задача 7. (баллов: 4, сдач: 2) Рассмотрим систему (рис. 1б) с $W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ и знаменатель ее передаточной функции $Q(s) + KP(s)$. Как ведут себя его корни при изменении параметра K от 0 до ∞ ? Сделайте выводы о значении нулей передаточной функции для применимости глубокой обратной связи.

Задача 8. (баллов: 1, сдачи: 2)

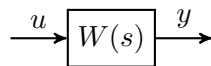


Рис. 1а

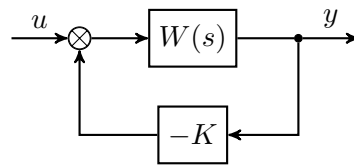


Рис. 1б

Логарифмической чувствительностью величины a по отношению к величине b называется величина $\frac{d \ln a}{d \ln b} = \frac{da/a}{db/b}$, показывающая, как сильно меняется a при изменении b в относительных единицах. Рассмотрим систему и ее замыкание обратной связью с коэффициентом усиления $K > 0$ (рис. 1). Вычислите логарифмические чувствительности передаточных функций обеих систем по отношению к передаточной функции объекта управления $W(s)$. Как ведет себя чувствительность замкнутой системы при увеличении коэффициента обратной связи? Сделайте выводы.

Выражение $W = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ обозначает передаточную функцию системы, имеющей реализацию $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$

Задача 9. (баллов: 2, сдачи: 2) Пусть система $W = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ скалярная, $h \geq 0$,

$$\tau_h(W) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] - e^{-sh} \left[\begin{array}{c|c} A & e^{Ah}B \\ \hline C & 0 \end{array} \right].$$

Опишите, как связаны между собой весовые функции W и $\tau_h(W)$.

Задача 10. (баллов: 3, сдачи: 1) Пусть система $W = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ скалярная, $h \geq 0$,

$$\pi_h(W) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline Ce^{-Ah} & 0 \end{array} \right] - e^{-sh} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

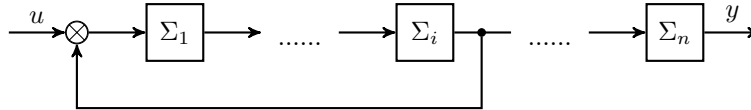
Опишите, как связаны между собой весовые функции W и $\pi_h(W)$.

Задача 11. (баллов: 2, сдач: 2) Дано k SISO-систем Σ_i вида

$$\dot{x}^i = A^i x^i + b^i u^i, \quad y^i = c^i x^i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Найти описание в пространстве состояний системы, полученной в результате:

- последовательного соединения систем $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Sigma_k$;
- параллельного соединения систем Σ_i ;
- соединения обратной связью по схеме



Задача 12. (баллов: 2, сдач: 3) Пусть передаточные функции $W(s)$ и $W_1(s)$ имеют весовые функции $k(t)$ и $k_1(t)$, соответственно. Показать, что

$$|k(t) - k_1(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega) - W_1(j\omega)| d\omega.$$

Верно ли, что "близость" комплексных коэффициентов передачи влечет "близость" их весовых функций?

Передаточная функция $W(s)$ называется *физически реализуемой (каузальной)*, если ее весовая функция

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} W(s) e^{ts} ds \equiv 0 \text{ при } t < 0.$$

Согласно критерию Пэли–Винера, передаточная функция $W(s)$ физически реализуема тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg W(j\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty.$$

Задача 13. (баллов: 2, сдач: 2) Показать, что физически реализуемая передаточная функция отлична от нуля на любом отрезке мнимой оси $j\omega$.

Задача 14. (баллов: 2, сдач: 2) Показать, что для физически реализуемой передаточной функции

$$\int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

Задача 15. (баллов: 2, сдач: 3) Доказать, что функция $\psi(\omega) = \arg \varphi(j\omega)$, где

$$\varphi(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1$$

является монотонной функцией при $\omega \geq 0$, если полином $\varphi(s)$ — гурвицев. Найти асимптотику $\psi(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Задача 16. (баллов: 2, сдач: 2) Доказать, что выход $y(t)$ асимптотически устойчивой линейной стационарной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx \end{cases}$$

при ограниченном входе $u(t)$ равномерно непрерывен.

Задача 17. (баллов: 2, сдач: 2) Покажите, что уравнение $\dot{x} + x = f(t)$, $|f(t)| \leq M$ при $t \in \mathbb{R}$ имеет одно ограниченное решение и найдите его. Докажите, что при периодической $f(t)$ найденное решение будет периодическим.

Задача 18. (баллов: 2, сдач: 3) Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ с ограниченной правой частью $|f(t)| \leq M$. Пусть корни его характеристического полинома вещественны и отрицательны.

- Найдите решение, ограниченное при $t \in \mathbb{R}$.
- Покажите, что все остальные решение асимптотически стремятся к нему при $t \rightarrow +\infty$.
- Покажите, что если $f(t)$ периодическая, то это решение тоже периодическое.