Задача 1. *(баллов: 1, сдач: 4)* Решите следующие уравнения над множествами относительно X

1. $(X \cap A) \cup B = C$
2. $(X \cup A) \cap B = C$

Задача 2. *(баллов: 1, сдач: 1) Вещественным интервальным числом* $[x]$ будем называть интервал $[\underline{x}; \overline{x}]$, $\overline{x} \geq \underline{x}$. Арифметические операции над интервальными числами определяются следующим образом: $[x] \circ [y] = \{x \circ y | x \in [x], y \in [y]\}$.
Рассмотрим отображение $f(t) = t^2 - t$.
· Найдите образ отрезка $[x] = [-1; 3]$
· Вычислите интервальное число $[x]^2 - [x]$
· Вычислите интервальное число $([x] - 0.5)^2 - 0.25$
Сделайте выводы.

Задача 3. *(баллов: 1, сдач: 2)* Будем называть *интервальной* матрицу, элементами которой являются интервальные числа. Докажите, что произведение интервальных матриц неассоциативно.

Задача 4. *(баллов: 2, сдач: 2)* Обозначим за l_a максимальную длину интервала значений параметра k_1, в котором система, заданная дифференциальным уравнением

$$(k_1 + k_2)^2 y''' + y'' + R^2 y' + (1 + \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}) y = 3u' + u,$$

сохраняет устойчивость при $k_2 = a$. Укажите максимально возможное значение l_a.

Задача 5. *(баллов: 1, сдач: 2)* Рассмотрим шар, катающийся без проскальзывания по вложенному в $\mathbb{R}^3$ листу Мёбиуса. Вектор скорости шара в каждый момент времени составляет с направлением, параллельным границе листа, угол не более θ, шар не может выезжать на границу листа.
Входом системы будут величина скорость шара и угол отклонения скорости от указанного направления (в допустимых пределах). Состоянием — координаты и скорость центра шара. Выходом — координаты точки касания с поверхность.
При каких значениях θ данная система является управляемой? Наблюдаемой?

Задача 6. *(баллов: 2, сдач: 2)* Рассмотрим точку на плоскости, способную двигаться с тангенциальной скоростью $v : |v| = 1$ и поворачивать с угловой скоростью $\omega : |\omega| \leq \omega_{max}$. Состоянием системы является тройка (x, y, θ), где x, y — координаты точки на плоскости, а θ — угол между вектором скорости и осью Ox.
· Опишите пространство состояний системы.
· Покажите, что любое состояние является достижимым.
· Является ли эта система управляемой?

Задача 7. *(баллов: 1, сдач: 1)* Указать преобразование

$$z = P(t)\, x,$$

приводящее систему

$$\dot{x} = A(t)\, x + B(t)\, u$$

к виду

$$\dot z(t) = D(t)\,u.$$

Задача 8. *(баллов: 2, сдач: 2)* Показать, что система

$$\dot x = B(t)\,u, \quad t \geq 0, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m$$

управляема при $t \geq 0$, если строки матрицы $B(t)$ — линейно независимые функции. Является ли это условие необходимым?

Задача 9. *(баллов: 2, сдач: 2)* Пусть матрица $B(t) \in C^{n-1}[0;\infty)$. Доказать, что система

$$\dot x = B(t)\,u$$

управляема при $t \geq 0$, если при всех $t \geq 0$

$$\operatorname{rank}\left(B, \frac{dB}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,B\right) = n.$$

Задача 10. *(баллов: 3, сдач: 1)* Доказать, что система с бесконечно гладкими параметрами

$$\dot x = A(t)x + B(t)u$$

приводима к стационарному виду

$$\dot z = Hz + hv$$

гладкими преобразованиями

$$z = G(t)x, \quad u = R(t)x + D(t)v$$

тогда и только тогда, когда функции

$$r_j(t) = \operatorname{rank}\,(B, \Delta_A B, \ldots, \Delta_A^{j-1} B) - \operatorname{rank}\,(B, \Delta_A B, \ldots, \Delta_A^{j-2} B)$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ не зависят от t и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = n.$$

Задача 11. *(баллов: 1, сдач: 2)* Доказать, что n-мерная система

$$\dot x = Ax + Bu$$

управляема тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \dot x = A^\top x, \\ y = B^\top x \end{cases}$$

наблюдаема.

Задача 12. *(баллов: 2, сдач: 2)* Дана система

$$\dot{x} = g(t)(Ax + Bu),$$

где скалярная функция $g(t)$ — непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$0 < \alpha \leq g(t) \leq \beta < \infty, \quad t \geq 0.$$

Пусть $\operatorname{rank} \mathcal{K}(A, B) = n$.

Показать, что система управляема.

Задача 13. *(баллов: 1, сдач: 2)* Доказать, что пара $\{A, b\}$ управляема тогда и только тогда, когда управляема пара

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 14. *(баллов: 2, сдач: 2)*

Доказать, что тройка $\{c, A, b\}$ — управляема и наблюдаема тогда и только тогда, когда полиномы $\beta(s)$ и $\alpha(s)$ не имеют общих корней, здесь

$$\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = c(sE - A)^{-1}b.$$

Задача 15. *(баллов: 2, сдач: 2)* Пусть ранг матрицы наблюдаемости $\mathcal{N}(c, A)$ равен p. Доказать, что этот ранг накоплен на первых p строках, то есть

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \dots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \dots \\ cA^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Задача 16. *(баллов: 2, сдач: 2)* Доказать, что пара $\{c, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда из равенства $c(sE - A)^{-1}q = 0$ при всех s следует, что $q = 0$.

Задача 17. *(баллов: 2, сдач: 2)* Доказать, что пара $\{c, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица $M(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{tA^T} c^T c e^{tA} dt > 0$ при $t_2 > t_1$.

Задача 18. *(баллов: 2, сдач: 2)* Доказать, что пара $\{c, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} (sE - A)\, q = 0, \\ cq = 0 \end{cases}$$

для любого s из комплексной плоскости имеет только тривиальное решение $q = 0$.

Задача 19. *(баллов: 2, сдач: 2)* Доказать, что пара $\{c, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда при любом комплексном s

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} c \\ sE - A \end{pmatrix} = n.$$

Задача 20. *(баллов: 3, сдач: 1)* Доказать, что пара $\{c, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда не существует матрица подобия P такая, что

$$A_p = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{12} & A_{22} \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \end{array} \qquad c_P = \left(\begin{array}{c} c^1 \\ \hline 0 \end{array}\right)^\top,$$

где $c_p = c\,P^{-1}$, $A_p = PAP^{-1}$

Задача 21. *(баллов: 2, сдач: 2)* Пусть пара $\{c, A\}$ наблюдаема. Доказать, что тогда наблюдаема и пара $\{c, A - lc\}$ при любом векторе l.

Задача 22. *(баллов: 2, сдач: 2)* Пусть пара $\{c, A\}$ наблюдаема и $\lambda \in \sigma(A)$ — точка спектра матрицы A. Доказать, что тогда $\operatorname{rank}(\lambda E - A) = n - 1$.